

---

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa locală****7 februarie 2026****Subiecte clasa a X-a****Subiectul I (21p)**

a) Demonstrați că  $\sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}$  este număr natural.

b) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  sistemul: 
$$\begin{cases} x + \sqrt[3]{y} = 2 \\ y + \sqrt[3]{z} = 2 \\ z + \sqrt[3]{x} = 2 \end{cases}$$

c) Arătați că  $x + \frac{4}{\sqrt[4]{x-2}} \geq 7$ , pentru orice  $x \in (2, \infty)$

**(SGM)****Subiectul II (21p)**

a) Se consideră numerele  $a, b, c, d \in (1, \infty)$  și  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$  astfel încât:  $a^x = bcd$ ,  $b^y = cda$ ,  $c^z = dab$  și  $d^t = abc$ . Demonstrați că:  $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+t} = 1$

**(SGM)**

b) Fie  $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\log_a^b = \frac{4}{3}$  și  $\log_c^d = \frac{5}{6}$ . Dacă  $c - a = 37$ , să se afle  $b - d$ .

**Subiectul III (21p)**

a) Pentru  $r > 0$ , fie mulțimea  $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \text{ și } |z - 3i| = r\}$ . Să se determine  $r$  astfel încât mulțimea să aibă un singur element.

b) Să se rezolve în  $\mathbb{C}$  sistemul de ecuații: 
$$\begin{cases} x|y| = z^2 \\ y|z| = x^2 \\ z|x| = y^2 \end{cases}$$

**Subiectul IV (21p)**

- a) Să se demonstreze că funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \{2x\}$  nu este injectivă.
- b) Fie funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty), f(x) = x + \sqrt{x^2 - x + 1}$ . Demonstrați că  $f$  este funcție bijectivă și rezolvați ecuația  $(f \circ f)(x) = x$

***Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.***

***Se acordă 16 puncte din oficiu.***

***Timp de lucru 3 ore.***